全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品高考复习方案

本册主编 庞志全

主编：肖德好

广东省

听课手册

数学

沈阳出版发行集团

沈阳出版社

【对点演练 3】(1)命题“$\forall a,b>0,a+\frac{1}{b}\geqslant 2$ 和 $b+\frac{1}{a}\geqslant 2$ 至少有一个成立”的否定为 (　　)

A. $\forall a,b>0,a+\frac{1}{b}<2$ 和 $b+\frac{1}{a}<2$ 至少有一个成立

B. $\forall a,b>0,a+\frac{1}{b}\geqslant 2$ 和 $b+\frac{1}{a}\geqslant 2$ 都不成立

C. $\exists a,b>0,a+\frac{1}{b}<2$ 和 $b+\frac{1}{a}<2$ 至少有一个成立

D. $\exists a,b>0,a+\frac{1}{b}\geqslant 2$ 和 $b+\frac{1}{a}\geqslant 2$ 都不成立

(2)命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+(a+1)x+1<0$”为假命题,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

B. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

C. $[-3,1]$

D. $(-3,1)$

(3)[2026·江苏南京期末] 若“$\forall x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,$x^2-\lambda x+2\geqslant 0$”是真命题,则实数 λ 的最大值为 (　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

[听课笔记]

第 3 讲　等式性质与不等式性质

【课标要求】 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法$\begin{cases}a-b>0\Leftrightarrow a_____b,\\ a-b=0\Leftrightarrow a_____b,\\ a-b<0\Leftrightarrow a_____b.\end{cases}$

(2)作商法

$\begin{cases}\frac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_b(a\in\mathbf{R},b>0),\\ \frac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_\_b(a\in\mathbf{R},b>0).\end{cases}$

2. 等式的性质

(1)若 $a=b$,则 $b=a$;

(2)若 $a=b,b=c$,则 $a=c$;

(3)若 $a=b$,则对任意 c,都有_____或_____或_____;

(4)若 $a=b$,则对任意不为零的 c,都有_____.

3. 不等式的性质

(1)对称性:$a>b\Leftrightarrow$_____(双向性).

(2)传递性:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(单向性).

(3)可加性:$a>b\Leftrightarrow a+c$____$b+c$(双向性).

(4)可乘性:$a>b,c>0\Rightarrow ac$____bc;

$a>b,c<0\Rightarrow ac$____bc.

(5)$a>b,c>d\Rightarrow$_____(单向性).

(6)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac$____$bd$(单向性).

(7)乘方法则:$a>b>0\Rightarrow a^n$_____$b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$(单向性).

◆◆ 常用结论

1. 若 $a<x<b,c<y<d$,则 $a-d<x-y<b-c$.

2. 已知 a,b,m 都是正数,且 $a>b$,则

(1)$\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(b-m>0)$,即真分数越加越大,越减越小;

(2)$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}<\frac{a-m}{b-m}(b-m>0)$,即假分数越加越小,越减越大.

课前演练

题组一　易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)实数 a 不大于 -2,用不等式表示为 $a\geqslant -2$. (　　)

(2)$x^2>y^2$ 的充要条件是 $|x|>|y|$. (　　)

(3)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$. (　　)

(4)不等式 $\dfrac{x-1}{x+2}\leqslant 2$ 的解集是 $[-5,+\infty)$. (　　)

题组二　教材改编

1. 已知 a,b,c 都是实数,若 $a>b$,则下列不等式一定成立的是 (　　)

A. $\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$　　B. $ac>bc$

C. $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$　　D. $a-c>b-c$

2. 已知 a,b,c,d 为实数,$a>b$ 且 $c>d$,则下列不等式一定成立的是 (　　)

A. $ac>bd$　　B. $a+c>b+d$

C. $ac<bd$　　D. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

3. 已知 $a=\sqrt{6}+\sqrt{10}$,$b=2\sqrt{3}+2$,则 a,b 的大小关系是 (　　)

A. $a>b$　　B. $a=b$

C. $a<b$　　D. 无法确定

4. 已知 $1\leqslant a\leqslant 4$,$-1\leqslant b\leqslant 2$,则 $3a-b$ 的取值范围是 (　　)

A. $-13\leqslant 3a-b\leqslant 1$

B. $-1\leqslant 3a-b\leqslant 8$

C. $-1\leqslant 3a-b\leqslant 13$

D. $1\leqslant 3a-b\leqslant 13$

课堂考点探究

探究点一　比较数(式)的大小

例 1 (1)已知 a,b 均为正实数,若 $M=a^3+b^3$,$N=a^2b+ab^2$,则 (　　)

A. $M<N$　　B. $M\leqslant N$

C. $M>N$　　D. $M\geqslant N$

(2)设 $a>b>0$,$M=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$,$N=\dfrac{a-b}{a+b}$,比较 M,N 的大小.

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

比较数(或式)的大小可以利用不等式或函数的性质进行判断,也可以用作差法或作商法进行判断.作差法要将最后的差值与 0 进行比较;作商法首先判断两个量的正负,然后作商,最后将商值与 1 进行比较.

【对点演练 1】[2026·四川绵阳模拟] 已知 $P=a^2+3a+3$,$Q=a+1$,则 P 与 Q 的大小关系为 (　　)

A. $P<Q$　　B. $P=Q$

C. $P>Q$　　D. $P\leqslant Q$

[听课笔记]

探究点二　不等式的性质及应用

题型 1　不等式的性质

例 2 (1)[2026·湖南益阳期末] 已知 $a>b>0$,$c>d>0$,则 (　　)

A. $a+d>b+c$　　B. $a-d>c-b$

C. $ac^2>bc^2$　　D. $ad>bc$

(2)[2025·浙江温州期末] 下列命题为真命题的是 (　　)

A. 若 $a>b>0$,则 $ac^2>bc^2$

B. 若 $a>b>0$,则 $a^2>b^2$

C. 若 $a<b<0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

D. 若 $a<b<0$,则 $\sqrt{-a}<\sqrt{-b}$

[听课笔记]

题型 2　不等式的应用

例 3　从坐标平面的四个象限中取若干点,这些点中横坐标为正数的点比横坐标为负数的点多,纵坐标为正数的点比纵坐标为负数的点少,则下列对这些点的判断一定正确的是 (　　)

A. 第一象限点比第二象限点多

B. 第二象限点比第三象限点多

C. 第一象限点比第三象限点少

D. 第二象限点比第四象限点少

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

1. 在应用不等式的性质时,一定要搞清它们成立的前提条件,不可强化或弱化成立的条件;

2. 要注意“箭头”是单向的还是双向的,也就是说每条性质是否具有可逆性;

3. 在解决与不等关系有关的实际问题时,要读懂题意,用适当的不等号将相关数(或式)联系起来,还要注意字母的实际意义.

【对点演练 2】 (1)设 $a,b\in\mathbf{R}$,则“$ab<1$”是“$0<a<\frac{1}{b}$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)若 $3\leqslant a\leqslant 5$,$-2\leqslant b\leqslant 1$,则 $2a-b$ 的取值范围是 (　　)

A. $[8,9]$　　B. $[4,8]$

C. $[5,8]$　　D. $[5,12]$

(3)[2026·广东惠州一中模拟] 某校高一年级男生人数多于女生人数,在选科后选报物理方向的人数多于选报历史方向的人数,则 (　　)

A. 物理方向的男生多于物理方向的女生

B. 历史方向的女生多于历史方向的男生

C. 物理方向的女生多于历史方向的男生

D. 物理方向的男生多于历史方向的女生

[听课笔记]

第 4 讲　基本不等式

【课标要求】　掌握基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$($a,b\geqslant 0$).结合具体实例,能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件:_____.

(2)等号成立的条件:当且仅当_____时取等号.

2. 几个重要的不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant$_____($a,b\in\mathbf{R}$).

(2)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant$_____($a,b$ 同号).

(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$($a,b\in\mathbf{R}$).

(4)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$($a,b\in\mathbf{R}$).

3. 算术平均数与几何平均数

给定两个正数 a，b，数_____称为 a，b 的算术平均数；数 $\sqrt{ab}$ 称为 a，b 的几何平均数. 基本不等式可叙述为：_____.

4. 利用基本不等式求最值问题

已知 $x>0$，$y>0$.

(1)如果积 xy 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 取得最小值，是_____.(简记：积定和最小)

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，xy 取得最大值，是_____.(简记：和定积最大)

◆◆ 常用结论

1. 若 $x\neq 0$，则 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$，当且仅当 $x=\pm 1$ 时，等号成立.

2. 若 $ab\neq 0$，则 $\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$，当且仅当 $a=\pm b$ 时，等号成立.

3. 若 $ab>0$，$x\neq 0$，则 $\left|ax+\frac{b}{x}\right|\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时，等号成立.

课前演练

题组一 易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)对任意 a，$b\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 恒成立. (　　)

(2)若 $a>0$，$b>0$，则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. (　　)

(3)当 a，b 同号时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$. (　　)

题组二 教材改编

1. 已知 $x>0$，则 $y=x+\frac{4}{x}$ 的最小值为 (　　)

A. 2　　B. 4

C. -2　　D. -4

2. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=2$，则 (　　)

A. xy 的最大值为 1

B. xy 的最小值为 1

C. xy 的最大值为 $\sqrt{2}$

D. xy 的最小值为 $\sqrt{2}$

3. 已知 $4a^2+b^2=6$，则 ab 的最大值为 (　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

课堂考点探究

探究点一 利用基本不等式求最值

题型 1 配凑法求最值

例 1 (1)已知 $x>0$，则 $\frac{4}{1+x}+x$ 的最小值是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)[2026·湖南岳阳期末] 已知 $x>1$，$y>2$ 且 $xy-2x-y=0$，则 $x+y$ 的最小值为 (　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}+3$

C. 4　　D. 6

[听课笔记]_____

题型 2 常数代换法

例 2 (1)已知两个正实数 a，b 满足 $a+\frac{2}{b}=1$，则 $\frac{2}{a}+b$ 的最小值为 (　　)

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

(2)[2026·河北沧州联考] 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=1$，则 $\frac{x^2+y^2+2x-y+1}{xy}$ 的最小值为 (　　)

A. $3+2\sqrt{3}$　　B. 7

C. $3+2\sqrt{5}$　　D. 8

[听课笔记]_____

题型 3　消元法

例 3　若 $x,y\in[0,+\infty)$，且 $2x-y=4-xy$，则 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y+2}$ 的最小值是　（　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

1. 配凑法就是将相关代数式进行适当的变形，通过添项、拆项等方法凑成和为定值或积为定值的形式，然后利用基本不等式求解最值的方法. 配凑法的实质是代数式的灵活变形，配系数、凑常数是关键.

2. 常数代换法主要解决形如“已知 $mx+ny=t$（t 为不等于 0 的常数），求 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}$ 的最值”或“已知 $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}=t$（$t$ 为不等于 0 的常数），求 $ax+by$ 的最值”的问题，通常将 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}$ 转化为 $\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}\right)\cdot\dfrac{mx+ny}{t}$ 或将 $ax+by$ 转化为 $\left(\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}\right)\cdot\dfrac{ax+by}{t}$，再利用基本不等式求最值.

3. 通过消元法利用基本不等式求最值的策略：当所求最值的代数式中的变量比较多时，通常考虑利用已知条件消去部分变量后，凑出“和为常数”或“积为常数”，最后利用基本不等式求最值.

【对点演练 1】（1）[2026·重庆江北区期末] 若正实数 x,y 满足 $xy+x-3y=-1$，则 $x-y$ 的最大值为　（　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

（2）已知正实数 m,n 满足 $2m+n=2mn$，则 $m+n$ 的最小值为　（　）

A. $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}+2\sqrt{2}$

C. $2+\sqrt{2}$　　D. $2+2\sqrt{2}$

（3）[2026·山东青岛期末] 已知 $a>b>1$，若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$，则 $\dfrac{a+4}{b}$ 的最小值为　（　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

[听课笔记]

探究点二　基本不等式的常见变形

例 4　已知 $0<a<1,b>1$，则下列不等式一定成立的是　（　）

A. $a+b<\dfrac{4ab}{a+b}$　　B. $\sqrt{ab}<\dfrac{2ab}{a+b}$

C. $\sqrt{2a^2+2b^2}<2\sqrt{ab}$　　D. $a+b<\sqrt{2a^2+2b^2}$

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

基本不等式的常见变形

（1）$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

（2）$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$（$a>0,b>0$）.

【对点演练 2】（多选题）已知 $a>0,b>0$，则下列不等式一定成立的是　（　）

A. $a+b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant2\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{2ab}{a+b}\geqslant\sqrt{ab}$

C. $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$　　D. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant4$

[听课笔记]

探究点三　基本不等式的实际应用

例 5　森林中某些昆虫会通过向后跳跃的方式来躲避偷袭的天敌. 某生物小组研究表明某类昆虫在水平速度为 v（单位：米/秒）时的跳跃高度 H（单位：米）近似满足 $v^2=\dfrac{4H}{1-Hv^2}$ 的等量关系，则该类昆虫的最大跳跃高度约为　（　）

A. 0.2 米　　B. 0.25 米

C. 0.45 米　　D. 0.7 米